Tema 3

Circuitos de Corriente Alterna

BIBLIOGRAFÍA

- Edminister. "Circuitos eléctricos". Cap. 8, 9 y 30. McGraw-Hill

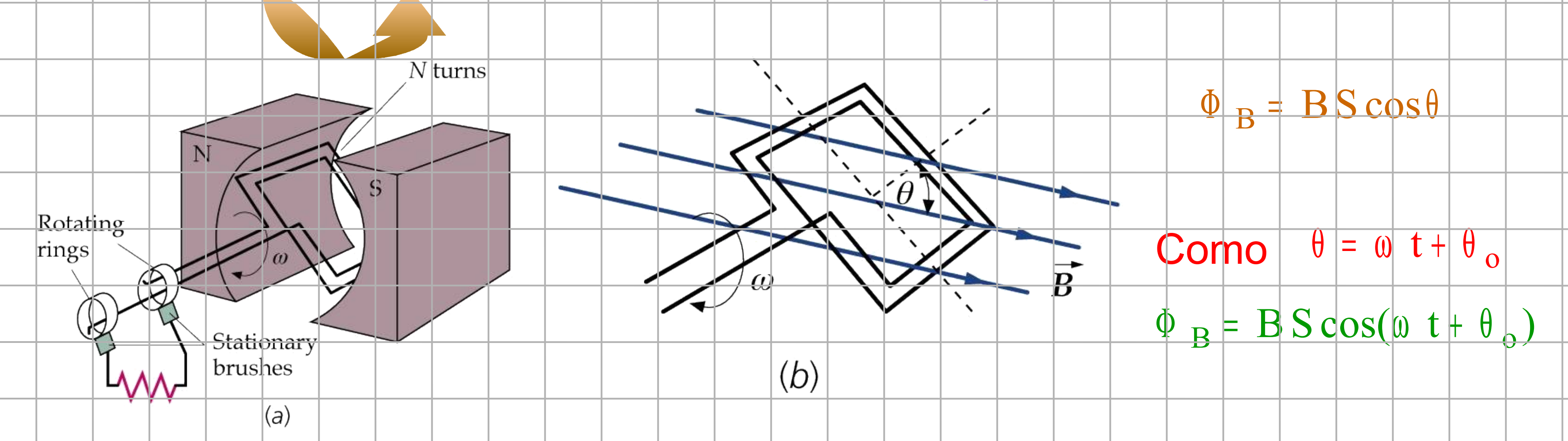
- Fraile Mora. "Electromagnetismo y circuitos eléctricos". E.T.S.I.T. Madrid.

3.1. Fuerza Electro Motriz alterna sinusoidal

Se dice que una corriente es alterna si cambia de sentido periódicamente.

Generador de corriente alterna

Una espira que gira con velocidad angular constante en el seno de un campo magnético uniforme



$$\Phi_B = B\,S\cos\theta$$

Como $\theta = \omega t + \theta_o$

$$\Phi_B = B\,S\cos(\omega t + \theta_o)$$

Tomando $\theta_o = \pi/2$, para una espira con N vueltas

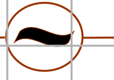
$$\Phi_B = -N\,B\,S\,\text{sen}\,\omega t$$

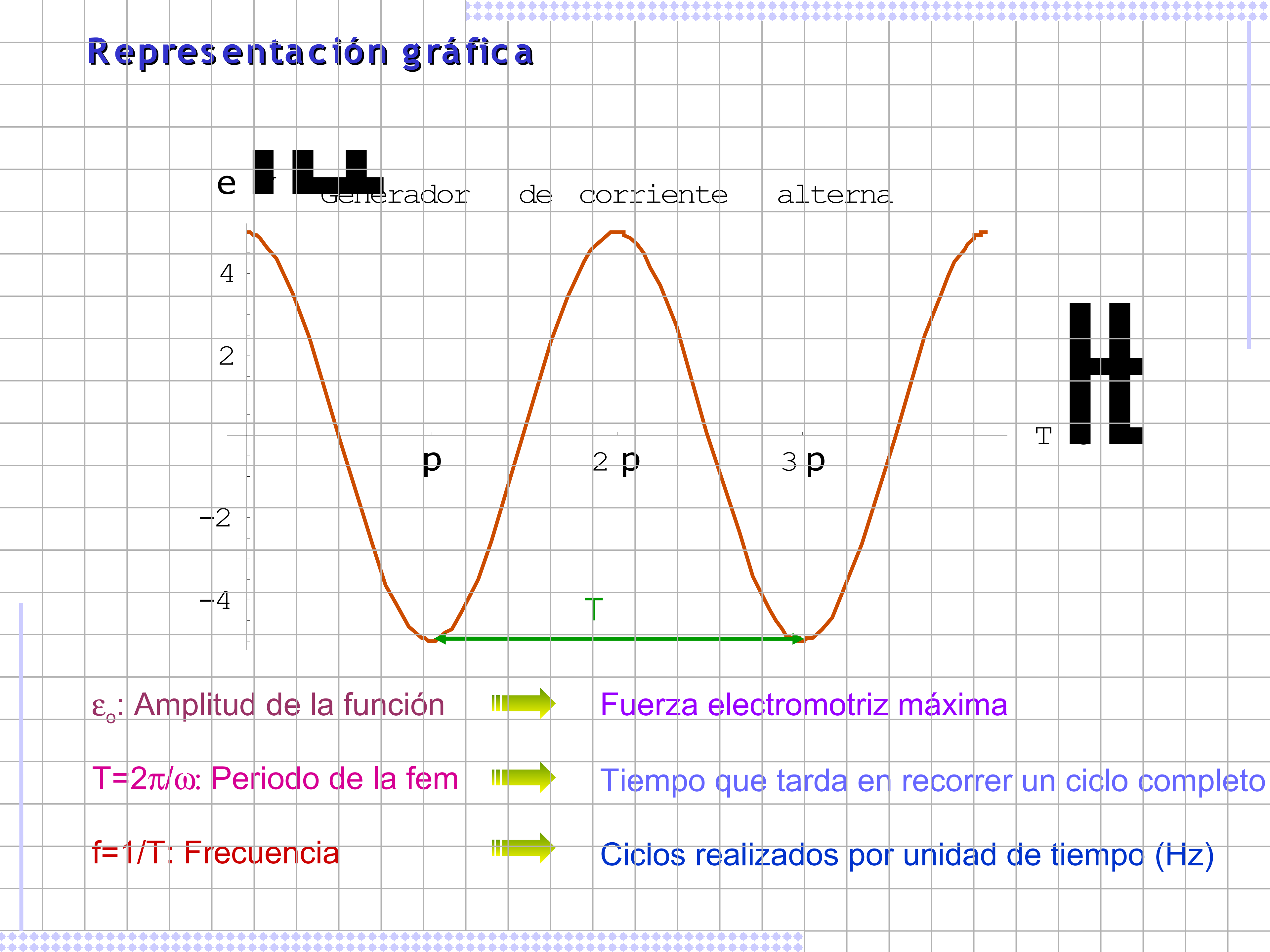
Aplicando la ley de Faraday

$$\varepsilon = -\frac{d\Phi_B}{dt} = N\,B\,S\,\omega\cos\omega t$$

$$\boxed{\varepsilon = \varepsilon_o \cos\omega t}$$

Generador de corriente alterna





Representación gráfica
e
Generador de corriente alterna
4
2
−2
−4
p
2 p
3 p
T
T
ε_o: Amplitud de la función
Fuerza electromotriz máxima
T=2π/ω: Periodo de la fem
Tiempo que tarda en recorrer un ciclo completo
f=1/T: Frecuencia
Ciclos realizados por unidad de tiempo (Hz)

3.2 Valores medios y eficaces

Caracterización de una corriente utilizando valores medios

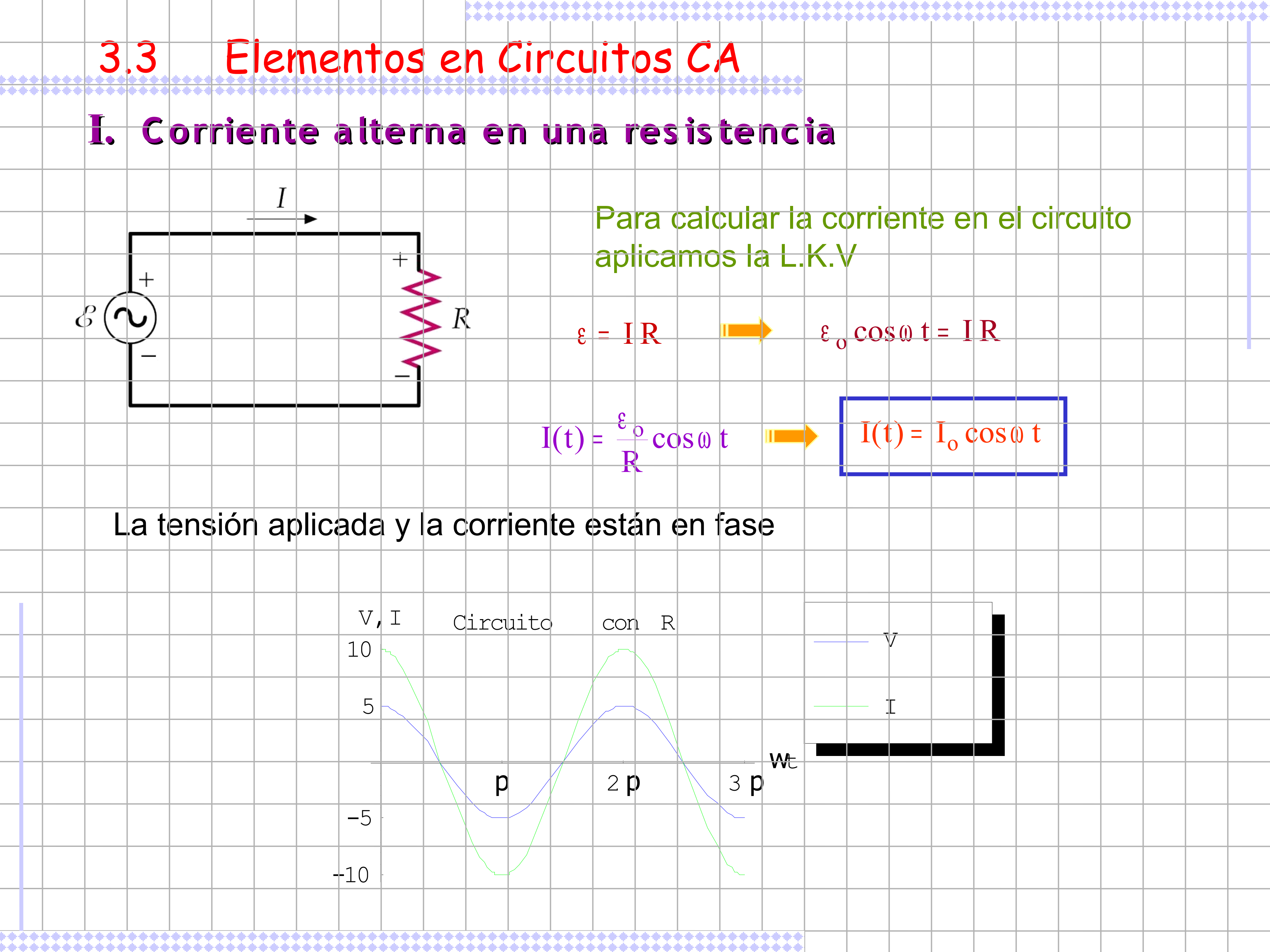
$$\langle f \rangle = \frac{1}{T}\int_0^T f\,dt \quad \begin{cases} \langle V \rangle = \frac{1}{T}\int_0^T V\,dt \\ \langle I \rangle = \frac{1}{T}\int_0^T I\,dt \end{cases}$$

Si $V = V_o \cos\omega t$ con $T = \frac{2\pi}{\omega}$

$$\langle V \rangle = \frac{\omega}{2\pi}\int_0^T V_o \cos\omega t\,dt = \frac{1}{2\pi} V_o [\operatorname{sen}\omega t]_0^{2\pi/\omega} = 0$$

$$\langle I \rangle = \frac{\omega}{2\pi}\int_0^T I_o \cos\omega t\,dt = \frac{1}{2\pi} I_o [\operatorname{sen}\omega t]_0^{2\pi/\omega} = 0$$

⇒ Los valores medios no dan información sobre las corrientes alternas.



3.3 Elementos en Circuitos CA
I. Corriente alterna en una resistencia
I
+
ℰ
−
+
R
−
Para calcular la corriente en el circuito aplicamos la L.K.V
$\varepsilon = I R$
$\varepsilon_o \cos\omega t = I R$
$I(t) = \frac{\varepsilon_o}{R} \cos\omega t$
$I(t) = I_o \cos\omega t$
La tensión aplicada y la corriente están en fase
V, I
Circuito con R
10
5
-5
-10
p
2 p
3 p
wt
V
I

II. Corriente alterna en un condensador

Para calcular la corriente en el circuito aplicamos la L.K.V

$$\varepsilon = V_c = \frac{q}{C} \Rightarrow \varepsilon_o \cos\omega t = \frac{q}{C}$$

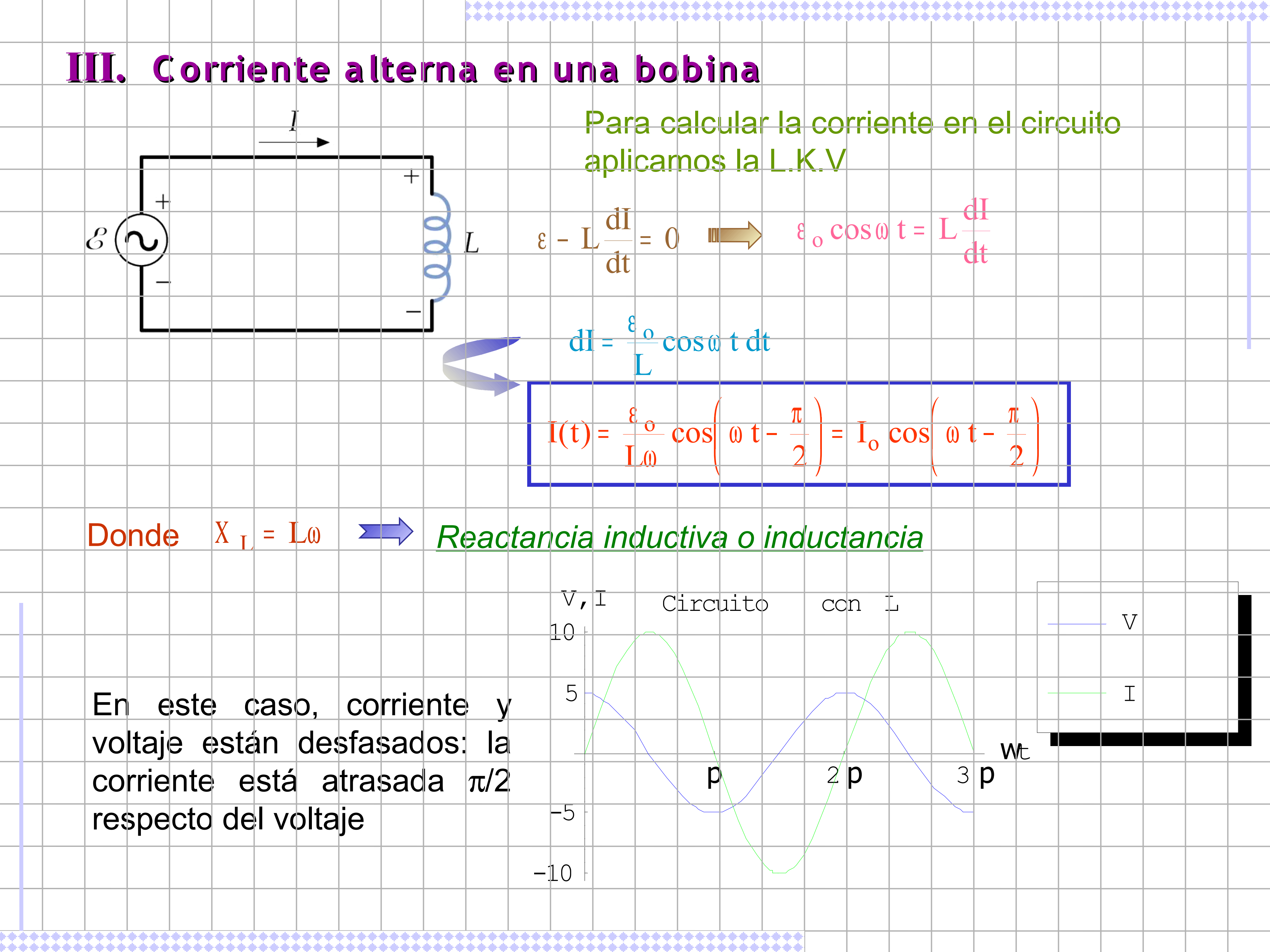
$$q(t) = \varepsilon_o C \cos\omega t$$

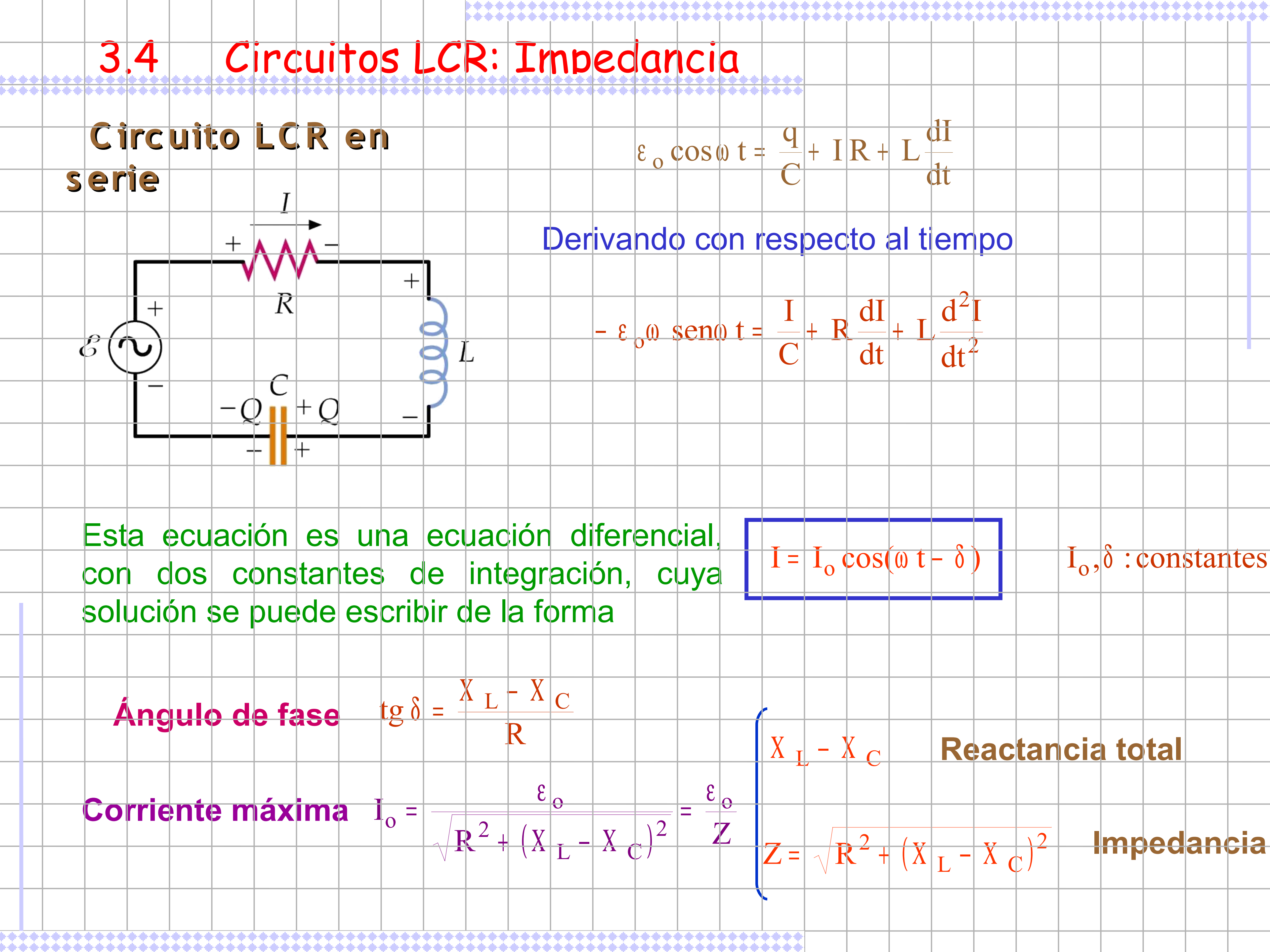
$$I(t) = \frac{dq(t)}{dt} = -\varepsilon_o C\omega \operatorname{sen}\omega t$$

$$I(t) = \frac{\varepsilon_o}{1/C\omega}\cos\left(\omega t + \frac{\pi}{2}\right) = I_o \cos\left(\omega t + \frac{\pi}{2}\right)$$

Donde $X_c = \frac{1}{C\omega}$ → *Reactancia capacitiva o capacitancia*

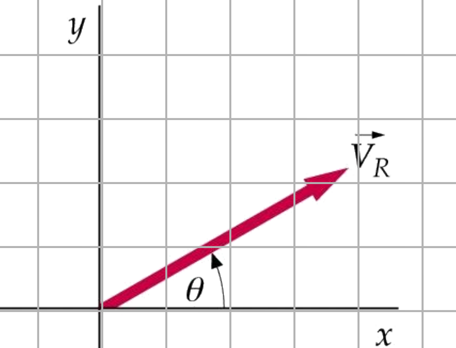
En este caso, corriente y voltaje están desfasados: la corriente está adelantada $\pi/2$ respecto del voltaje


III. Corriente alterna en una bobina
I
+
+
$\mathcal{E}$
L
–
–
Para calcular la corriente en el circuito aplicamos la L.K.V
$\varepsilon - L\frac{dI}{dt} = 0$
$\varepsilon_o \cos\omega t = L\frac{dI}{dt}$
$dI = \frac{\varepsilon_o}{L}\cos\omega t \, dt$
$I(t) = \frac{\varepsilon_o}{L\omega}\cos\left(\omega t - \frac{\pi}{2}\right) = I_o \cos\left(\omega t - \frac{\pi}{2}\right)$
Donde $X_L = L\omega$
Reactancia inductiva o inductancia
En este caso, corriente y voltaje están desfasados: la corriente está atrasada π/2 respecto del voltaje
V, I
Circuito con L
10
5
-5
-10
p
2 p
3 p
wt
V
I


3.4 Circuitos LCR: Impedancia
Circuito LCR en serie
I
R
C
L
−Q
+Q
$\varepsilon_o \cos\omega t = \frac{q}{C} + IR + L\frac{dI}{dt}$
Derivando con respecto al tiempo
$-\varepsilon_o \omega \,\mathrm{sen}\,\omega t = \frac{I}{C} + R\frac{dI}{dt} + L\frac{d^2I}{dt^2}$
Esta ecuación es una ecuación diferencial, con dos constantes de integración, cuya solución se puede escribir de la forma
$I = I_o \cos(\omega t - \delta)$
I_o, δ : constantes
Ángulo de fase
$\mathrm{tg}\,\delta = \frac{X_L - X_C}{R}$
Corriente máxima
$I_o = \frac{\varepsilon_o}{\sqrt{R^2 + (X_L - X_C)^2}} = \frac{\varepsilon_o}{Z}$
$X_L - X_C$
Reactancia total
$Z = \sqrt{R^2 + (X_L - X_C)^2}$
Impedancia

3.5 Notación fasorial

La relación entre corriente y voltaje en una bobina o en un condensador puede representarse mediante vectores bidimensionales llamados **fasores**.

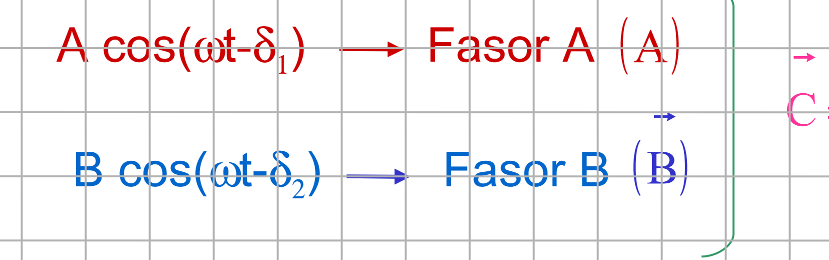


Podemos representar la caída de potencial en una resistencia como un vector de módulo $I_o R$, que forma un ángulo θ con el eje X

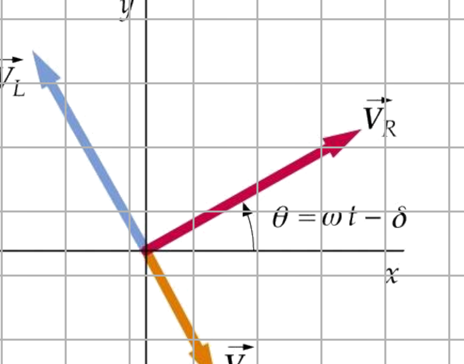
El valor instantáneo de la caída de tensión es la componente x del vector V_R, que gira en sentido antihorario con una velocidad ω.

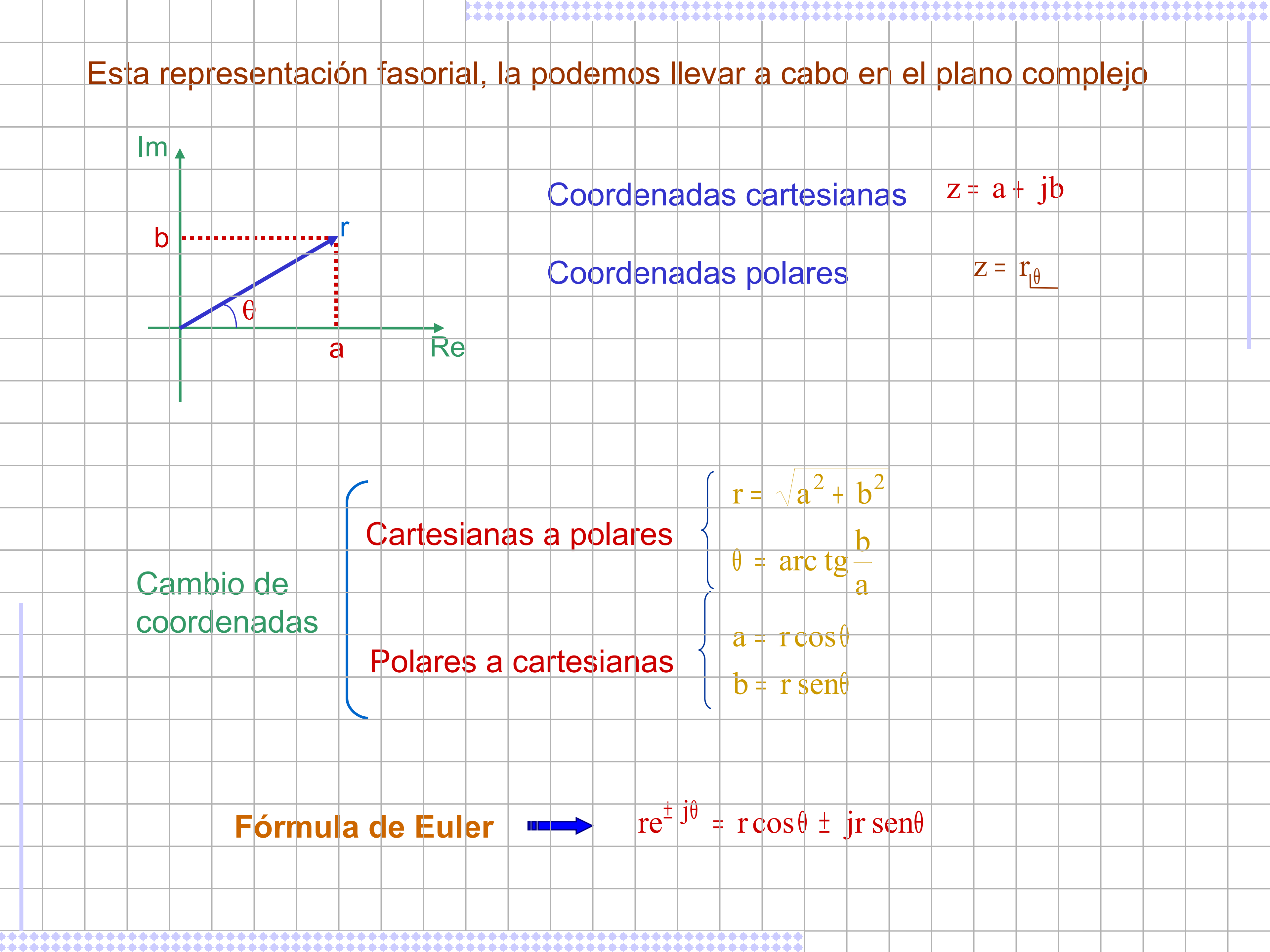


Cualquier función A cos(ωt-δ), será la componente x de un fasor que forma un ángulo (ωt-δ) con el eje x



$\vec{C} = \vec{A} + \vec{B}$

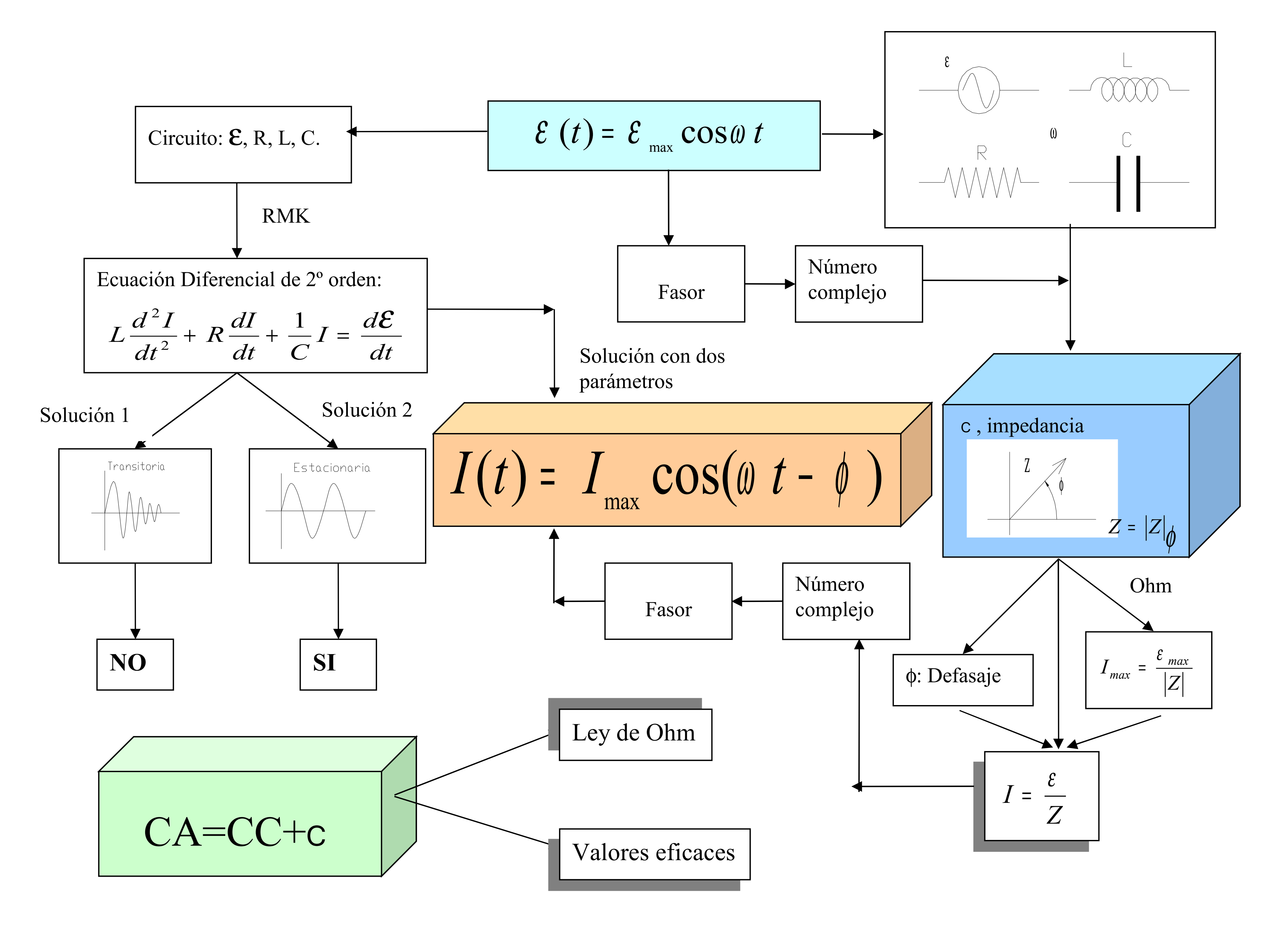



Esta representación fasorial, la podemos llevar a cabo en el plano complejo
Im
b
r
θ
a
Re
Coordenadas cartesianas
$z = a + jb$
Coordenadas polares
$z = r_{|\theta}$
Cambio de coordenadas
Cartesianas a polares
$r = \sqrt{a^2 + b^2}$
$\theta = \text{arc tg} \frac{b}{a}$
Polares a cartesianas
$a = r\cos\theta$
$b = r\,\text{sen}\theta$
Fórmula de Euler
$re^{\pm j\theta} = r\cos\theta \pm jr\,\text{sen}\theta$

Representación compleja de elementos de corriente alterna

Vamos a reproducir las corrientes encontradas en circuitos de corriente alterna utilizando el formalismo de los números complejos. Representaremos por ε e i las tensiones y corrientes, teniendo en cuenta que las magnitudes de interés físico serán Re(ε) y Re(i). Así, los circuitos de corriente alterna se pueden resolver considerando la ley de Ohm con el formalismo de los números complejos.

- **Fuente de tensión** — $\varepsilon = \varepsilon_o e^{j(\omega t + \delta)}$ $\quad \varepsilon = \varepsilon_o \angle \delta$ ⇒ $Re(\varepsilon) = \varepsilon_o \cos(\omega t + \delta)$
- **Resistencia** — $Z_R = R$ ⇒ Corriente y tensión están en fase.
- **Condensador** — $Z_C = -\frac{j}{C\omega}$ ⇒ Corriente adelantada π/2 respecto de la tensión.
- **Inducción** — $Z_L = jL\omega$ ⇒ Corriente atrasada π/2 respecto de la tensión.



Circuito: ℰ, R, L, C.
$\mathcal{E}(t) = \mathcal{E}_{max} \cos\omega t$
ε
L
ω
R
C
RMK
Ecuación Diferencial de 2º orden:
$L\frac{d^2I}{dt^2} + R\frac{dI}{dt} + \frac{1}{C}I = \frac{d\mathcal{E}}{dt}$
Fasor
Número complejo
Solución con dos parámetros
Solución 1
Solución 2
Transitoria
Estacionaria
$I(t) = I_{max}\cos(\omega t - \phi)$
c , impedancia
Z
ϕ
$Z = |Z|_{\phi}$
NO
SI
Fasor
Número complejo
Ohm
ϕ: Defasaje
$I_{max} = \frac{\varepsilon_{max}}{|Z|}$
$I = \frac{\varepsilon}{Z}$
Ley de Ohm
Valores eficaces
CA=CC+c